21/10/2019

Είδαμε ότι στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχουν διάφορες νόρμες (δηλ. συναρτήσεις από το $\mathbb{R}^n$ στο $[0,\infty)$ με διάφορες συγκ. ιδιότητες)

Π.χ.

$\|\bar{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ (Ευκλείδεια νόρμα)

$\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (νόρμα 1)

$\|\bar{x}\|_\infty = \max\{|x_i| : i=1,\dots,n\}$ (νόρμα ∞)

Αυτές επάγουν διαφορετικές μετρικές (δηλ. συν. από το $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$)

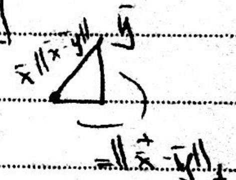
$d(\bar{x},\bar{y}) = \|\bar{x}-\bar{y}\|$ (Ευκλ. μετρική) στο $[0,\infty)$ με διαφ. συγκ. ιδιοτ.)

$d_1(\bar{x},\bar{y}) = \|\bar{x}-\bar{y}\|_1$ («μετρική 1»)

$d_\infty(\bar{x},\bar{y}) = \|\bar{x}-\bar{y}\|_\infty$ («μετρική ∞»)

δηλ. διαφορετικούς τρόπους να μετρήσουμε την απόσταση δύο σημείων $\bar{x}$ και $\bar{y}$ του $\mathbb{R}^n$.

$n=2$



Αποδεικνύεται στον $\mathbb{R}^n$ όλες οι μετρικές αυτές (δηλ. αποστάσεις) είναι ισοδύναμες, δηλ. αν μια απόσταση είναι «μεγάλη/μικρή» ως προς τη μια μετρική, θα είναι και ως προς την άλλη. Αυτό οφείλεται στο ότι στον $\mathbb{R}^n$ όλες οι νόρμες είναι ισοδύναμες.

Συγκεκριμένα:

Πρόταση: $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $\|\bar{x}\|_\infty \le \|\bar{x}\|_1 \le n\|\bar{x}\|_\infty$ ($\Rightarrow$ οι νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$ είναι ισοδύναμες)

$\|\bar{x}\|_\infty \le \|\bar{x}\| \le \sqrt{n}\,\|\bar{x}\|_\infty$ ($\Rightarrow$ — || —)

$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\bar{x}\| \le \|\bar{x}\|_1 \le n\|\bar{x}\|$ ($\Rightarrow$ — || —)

Απόδειξη:

(1) $\forall i=1,\dots,n : |x_i| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \|\bar{x}\|_1$

$\Rightarrow \underbrace{\max\{|x_i| : i=1,\dots,n\}}_{=\|\bar{x}\|_\infty} \le \|\bar{x}\|_1$

και $\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i|}_{\le \|\bar{x}\|_\infty} \le \sum_{i=1}^{n} \|\bar{x}\|_\infty = n\|\bar{x}\|_\infty$

(2) $|x_i|^2 \le \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 = \|\bar{x}\|^2 \Rightarrow |x_i| \le \|\bar{x}\| \Rightarrow \|\bar{x}\|_\infty \le \|\bar{x}\|$

$\|\bar{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_i^2}_{\le \|\bar{x}\|_\infty^2}$ $[\forall i=1,\dots,n : |x_i| \le \underbrace{\max\{|x_j| : j=1,\dots,n\}}_{=\|\bar{x}\|_\infty}]$

$\le \sum_{i=1}^{n} \|\bar{x}\|_\infty^2 = n\|\bar{x}\|_\infty^2$

$\Rightarrow \|\bar{x}\| = \sqrt{n}\,\|\bar{x}\|_\infty$

Μονοτ. ρίζας

$0 \le a \le b \Rightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{b}$

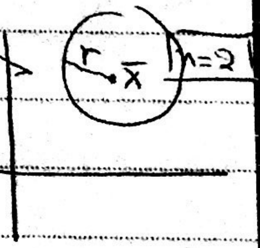
(3) → Άσκηση

Νέα ενότητα: "Κάποιες βασικές τοπολογικές έννοιες".

$B(\bar{x},r) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y}-\bar{x}\| < r\}$

$\bar{B}(\bar{x},r) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y}-\bar{x}\| \le r\}$

$\partial B(\bar{x},r) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\|\bar{y}-\bar{x}\|}_{=d(\bar{x},\bar{y})} = r\}$



① Ορίζουμε τα (υπο)σύνολα του $\mathbb{R}^n$ όπου $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $r>0$, και $\|\cdot\|$ η Ευκλείδια νόρμα

Την ανοιχτή μπάλα κέντρου $\bar{x}$ και ακτίνας r

Την κλειστή μπάλα -||- -||- -||- -||- -||-

Την σφαίρα -||- -||- -||- -||- -||-

Άσκηση: Αν με $B_1^{(\bar{x},r)}, B_2^{(\bar{x},r)}, B_\infty^{(\bar{x},r)}$ συμβολίζουμε την ~~ανοιχτή~~ κλειστή μπάλα κέντρου $\bar{x}$, ακτίνας r για τις νόρμες $\|\cdot\|, \|\cdot\|(\Rightarrow\|\cdot\|_2), \|\cdot\|_\infty$ (δηλ. τα $B_1^{(\bar{x},r)} = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y}-\bar{x}\|_1 \le r\}$) δείξτε ότι $B_1(\bar{x},r)\subset B_\infty(\bar{x},r)$, $B_2(\bar{x},r)\subset B_\infty(\bar{x},r)$

$B_\infty(\bar{x},r)\subset B_1(\bar{x},nr)$, $B_\infty(\bar{x},r)\subset B_2(\bar{x},\sqrt{n}\,r)$

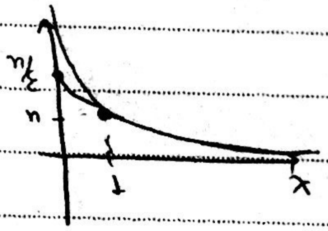
$B_1(\bar{x},r)\subset B_2(\bar{x},\sqrt{n}\,r)$, $B_2(\bar{x},r)\subset B_1(\bar{x},nr)$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε της ισοδυναμίας των $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$

Κίνητρο: Ερώτηση: Έστω η $f(\bar{x}) = \frac{1}{x}$, $x\in(0,1]$

Είναι συνεχής; Είναι φραγμένη;

ΝΑΙ ΟΧΙ



$g(\bar{x}) = \frac{1}{x}$, $x\in[\varepsilon,1]$ με $0<\varepsilon<1$

Είναι συνεχής; Είναι φραγμένη;

ΝΑΙ ΝΑΙ

Άρα η αλλαγή από το π.ο. $(0,1]$ στο $[\varepsilon,1]$ $(\varepsilon\in(0,1))$ αλλάζει σημαντικά την ολική συμπεριφορά της $1/x$

→ Ποια η διαφορά μεταξύ του $[0,1]$ και $(0,1]$;

(και τα δύο φραγμένα, το πρώτο κλειστό, το δεύτερο όχι κλειστό)

Παρατηρούμε ότι για την ακολουθία $\frac{1}{\nu}\subset(0,1]\subset[0,1]$

ισχύει $\frac{1}{\nu}\xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0 \begin{cases}\notin(0,1]\\ \in[0,1]\end{cases}$ $\quad(=)\ \frac{1}{\nu}\in(0,1]\ \forall \nu\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$

δηλ. το $[0,1]$ περιέχει τα όρια μιας συγκλίνουσας ακολουθίας μέσα σε αυτό [κλειστό] το σύνολο ενώ το $(0,1]$ δεν περιέχει το όριο μιας τουλάχιστον συγκ. ακολ. μέσα σε μια [το σύνολο δεν είναι κλειστό]

→ παίζει ρόλο αν τα άκρα του διαστήματος περιέχονται ή όχι στο διάστημα